Домашнее задание по курсу «Точные экспоненциальные алгоритмы» #8

Данил Сагунов

11 ноября 2021 г.

1. Докажите, что если задача Set Cover имеет решение за $\mathcal{O}^*(c^{|\mathcal{S}|+|\mathcal{U}|})$, то задача Dominating Set имеет решение за $\mathcal{O}^*(c^{2n})$.

2. Введем алгоритм $\mathrm{msc}(\mathcal{S})$ для задачи Set Cover (всегда считаем, что $\mathcal{U} = \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$), который вычисляет размер минимального покрытия. Он пользуется следующими правилами, применяя их в соответствующем порядке:

   Правило упрощения 1. Если $|\mathcal{S}| \le 1$, то следует вернуть $\mathrm{msc}(\mathcal{S}) = |\mathcal{S}|$.

   Правило упрощения 2. Если найдутся $S, R \in \mathcal{S}$, то следует вернуть $\mathrm{msc}(\mathcal{S}) = \mathrm{msc}(\mathcal{S} \setminus \{S\})$.

   Правило упрощения 3. Если есть такой $u \in \mathcal{U}$, что u содержится в единственном $S \in \mathcal{S}$, то следует вернуть $\mathrm{msc}(\mathcal{S}) = \mathrm{msc}(\mathrm{del}(\mathcal{S}, S)) + 1$, где $\mathrm{del}(\mathcal{S}, S) = \{S' \setminus S \mid S' \in \mathcal{S}, S' \not\subseteq S\}$.

   Правило упрощения 4. Если размеры всех множеств в $\mathcal{S}$ равны двум, решить задачу полиномиальным алгоритмом. *Алгоритм был разобран на практике.*

   Правило ветвления 5. Выбрать $S \in \mathcal{S}$ максимального размера. Осуществить ветвление $\mathrm{msc}(\mathcal{S}) = \min\{\mathrm{msc}(\mathcal{S} \setminus \{S\}), \mathrm{msc}(\mathrm{del}(\mathcal{S}, S)) + 1\}$.

   Докажите корректность алгоритма msc.

3. Введем меру $k(\mathcal{S}) = \sum_{i\ge1} w_i n_i(\mathcal{S}) + \sum_{j\ge1} v_j m_j(\mathcal{S})$, где $n_i(\mathcal{S}) = |\{S \in \mathcal{S} : |S| = i\}|$, и $m_j(\mathcal{S})$ — количество элементов в $\mathcal{U}$, которые встречаются ровно в j множествах из $\mathcal{S}$, т.е. количество элементов с частотой j.

   Кроме того, w_i и v_j выбраны так, что

   - $w_i, v_j \in [0, 1]$;
   - $w_i \le w_{i+1}$ и $v_j \le v_{j+1}$ для $i \ge 1, j \ge 1$;
   - $w_1 = v_1 = 0$;
   - $\Delta w_i \ge \Delta w_{i+1}$, где $\Delta w_i = w_i - w_{i-1}$ для любого $i \ge 2$;
   - $v_i = w_i = 1$ для $i \ge 6$.

   Докажите, что $k(\mathcal{S}) \le |\mathcal{S}| + |\mathcal{U}|$.

4. Пусть $\Delta v_i = v_i - v_{i-1}$ для $i \ge 2$. Пусть r_2 равно числу элементов $S \in \mathcal{S}$ из пятого правила ветвления с частотой 2. Докажите, что правило ветвления 5 в левой ветке (когда S решаем в ответ не брать) достигает изменения меры $k(\mathcal{S})$ на $w_{|S|} + \sum_{i=2}^{6} r_i \Delta v_i$ плюс хотя бы

   - $v_2 + w_2$, если $r_2 = 1$,
   - $v_2 + \min\{2w_2, w_3\} = v_2 + w_3$, если $r_2 = 2$,
   - $v_2 + \min\{3w_2, w_2 + w_3\} = v_2 + w_2 + w_3$, если $r_2 = |S| = 3$,
   - $v_2 + \min\{3w_2, w_2 + w_3, w_4\} = v_2 + w_4$, если $r_2 \ge 3, |S| \ge 4$.

5. Докажите, что правая ветка правила ветвления 5 достигает изменения меры на хотя бы

$$w_{|S|} + \sum_{i=2}^{6} r_i v_i + r_{\geq 7} + \Delta w_{|S|}(\sum_{i=2}^{6}(i-1)r_i + 6 \cdot r_{\geq 7}),$$

где r_i — число элементов частоты i в S. Покажите, что для оценки худшего случая достаточно рассмотреть $3 \leq |S| \leq 7$.

6. С помощью компьютерного перебора дайте верхнюю оценку вида $\mathcal{O}^*(c^{|\mathcal{S}|+|\mathcal{U}|})$ алгоритму msc, если веса в мере выбраны как

   - $w_2 = 0.377443$, $w_3 = 0.754886$, $w_4 = 0.909444$, $w_5 = 0.976388$,
   - $v_2 = 0.399418$, $v_3 = 0.767579$, $v_4 = 0.929850$, $v_5 = 0.985614$.

   Другими словами, найдите константу c для описанной меры и описанных способов оценки ее изменения. Желательно приложить код перебора. *Подсказка: достаточно перебирать лишь небольшое количество значений r_i небольшой суммы.*