INDEPENDENT SET
Независимое мн-во

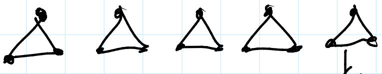
У G min вер. покр. $= k \iff$ max $IS = n-k$

$I \subseteq V(G)$ $G[I]$ не сод. ребер

- $O^*(3^{n/3}) \longrightarrow$ перечисляет все максимальные незав. мн-ва

перечисляет $\downarrow$ время работы $\geq$ числа объектов

максимальные ← maximum, maximal



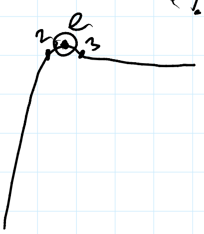
$3k$ 3^k

~~в~~ I - нез. $\forall v \in V \setminus I$ $I \cup \{v\}$ не яв-ся нез-м

Branching rule v — верш. мин. степени

$$\mathrm{mis}(G) = \bigcup_{w \in N[v]} \{\mathrm{mis}(G - N[w]) \cup \{w\}\}$$

$N[v]$ Утв В любом макс. по вкл. I $|I \cap N[v]| \geq 1$



$N[w]$ ↓ $\deg w + 1$

$$\underbrace{(\deg(v)+1, \deg(w_1)+1, \dots, \deg(w_{\deg v})+1)}_{\deg(v)+1}$$

$\deg(v)+1 \wedge$

$$\underbrace{(k, k, \dots, k)}_{k} \longrightarrow k^{1/k}$$

$$\boxed{3^{1/3}} \approx 1.4423$$

INDEPENDENT SET быстрее $\tau(1,3)^n$

pp MIS

Lemma 1 $vw \in E(G)$ & $N[v] \subseteq N[w] \Rightarrow \alpha(G) = \alpha(G-w)$

Lemma 2 Если v не входит ни в одно MIS, $(\alpha(G) \neq 1 + \alpha(G-v))$

то $\forall$ MIS содержит ≥ 2 верш. из $N(v)$

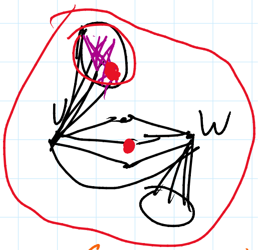
$$|(I \setminus N(v)) \cup \{v\}| \geq |I|$$

Опр. $N^2(v) = \{$вершины, достижимые из v по двум ребрам$\} \setminus \{v\}$

$N^2(v) = N(N(v)) \setminus \{v\}$

w наз-ся зеркалом v, если

- $w \in N^2(v)$
- $N(v) \setminus N(w)$ яв-ся кликой



$M(v) =$ мн-во зеркал v

Lemma 3 $\alpha(G) = \max(1 + \alpha(G - N[v]), \alpha(G - M(v) \cup \{v\})) \longrightarrow (\deg(v)+1, |M(v)|+1)$

Если v не входит ни в какое MIS, то и $\forall w \in M(v)$ не вх. в какое-то нез. мн-во

Если v не входит $\overset{\text{ни в какое}}{\text{в}}$ MIS, то и $\forall w \in M(v)$ не вх. $\overset{\text{в какое-то}}{\text{в нез}}$ мн-во

$\exists I \quad I \cap M(v) = \emptyset$

proof Возьмем $|I \cap N(v)| \geq 2 \quad \forall w \in M(v) \quad I \cap M(w) \neq \emptyset$

(**Lemma 4** Если $N[v]$ - клика, то $\alpha(G) = \alpha(G - N[v]) + 1$ ← simplicial rule

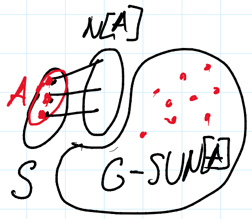
Lemma 5 $\alpha(G) = \max\limits_{\substack{A \subseteq S \\ A - \text{нез.}}} (|A| + \alpha(G - (S \cup N[A])))$ ← $|S| \leq 2$ ← $S = N^2(v)$

Опр. $S \subseteq V(G)$ наз-ся разделителем (separator) если $G - S$ содержит ≥ 2 КС

$I \cap S$

proof $\alpha(G) \geq x = |A| + \alpha(G - (S \cup N[A]))$

$\alpha(G) \leq x \qquad |I| = \alpha(G)$



$A := S \cap I$

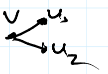
Уб $(I \setminus A) \cap S = \emptyset \qquad (I \setminus A) \cap N[A] = \emptyset$

$I \setminus A$ - нез. мн-во в $G - S \cup N[A]$

$x \geq |A| + \alpha(G - (S \cup N[A])) \geq |I| - |A| + |A| = |I|$ □

Строим алгоритм $\text{mis}(G)$

- верш. ст. $\leq 1 \longrightarrow \underline{\text{mis}(G - N[v]) + 1}$
- верш. ст. $= 2$



$\longrightarrow \overset{u_1 \quad u_2}{\bullet\!-\!\bullet} \nearrow$

$\longrightarrow \overset{u_1 \quad u_2}{\bullet \not- \bullet} \longrightarrow N^2(v) = 1$ $\{w\}$ $\qquad N^2[v] = N^2(v) \cup N[v]$

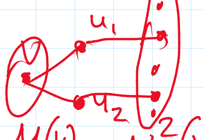
$\max \begin{cases} 2 + \text{mis}(G - (\underbrace{N^2[v]} \cup \underbrace{N[w]}_{\{u_1,u_2\}})) & \{v,w\} \\ \underbrace{2 + \text{mis}(G - N^2[v])} \end{cases}$ → 5 4

Br rule Если C - КС

$\text{mis}(G) = \text{mis}(C) + \text{mis}(G - C)$

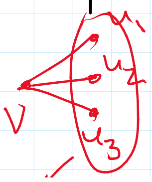
$N^2(v) > 1$

$\max\{\underbrace{1 + \text{mis}(G - N[v])}_{3}, \ 2 + \text{mis}(G - \underbrace{M(v) \cup \{v\}}_{5})\}$ $\{u_1, u_2\}$



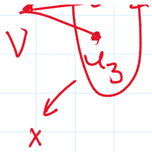
$M(v) = N^2(v)$

- вершины степени 3



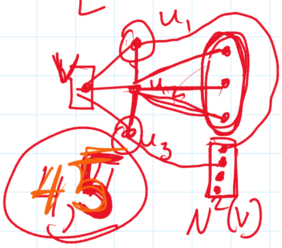
- $x = 3 \longrightarrow 1 + \text{mis}(G - N[v])$
- $x = 1$ или $x = 2$

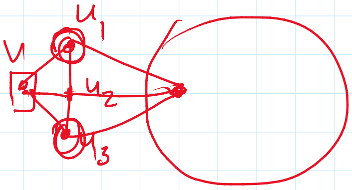
$\Big[\max(\ 1 + \text{mis}(G - N[v]), \ \text{mis}(G - M(v) \cup \{v\}))$

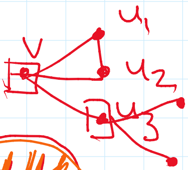


• $x=1$ или $x=2$

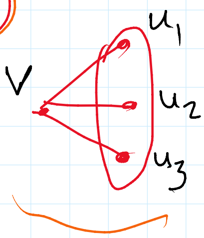
$[\max(1+mis(G-N[v]),\ mis(G-\underline{M(v)}\cup\{v\}))$







(4,4)



если $|M(v)|\geq 1$

mirror rule

$(\deg(v)+1,\ M(v)+1)$

(4,2) (4,2)

у v нет зеркала $M(v)=0$

Взяли v

$[\{u_1,u_2\}$ входит в I ←

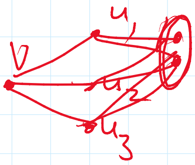
$u_1\notin I$ $\{u_2,u_3\}\subseteq I$

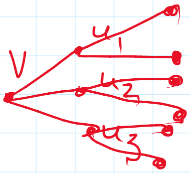
$u_2\notin I$ $\{u_1,u_3\}\subseteq I$

+2 +2 +2

(4,3,4,4)

$\underbrace{(4,7,8,8)}$



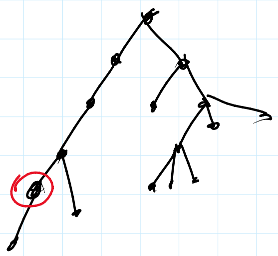


• если есть в-на ст. 6 $\Delta(G)\geq 6$

(1,7) ↘5

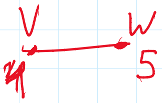
$\delta(G)\geq 4$ $\Delta(G)\leq 5$

[Пусть граф 4-регулярный или 5-регулярный

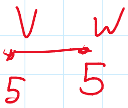


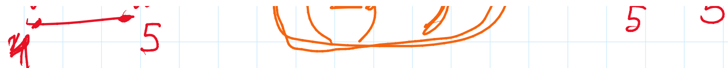
$\delta(G)=\Delta(G)$

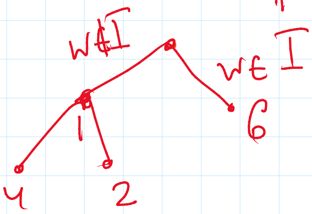
G − 4 регулярный



(1,6)







$(1,6) \rightarrow \boxed{1.2852}$

$(3,5)$

$(2,4) \rightarrow 1.2721$

$(5,3,6) < \boxed{1.2786}$ $(4,7,8,8) \rightarrow 1.2406$

$(5,8,9,9,6) < 1.2548$

$O^*(1.2786^n)$ ← gok.

$O^*(1.1996^n)$?