22 сентября 2021 г. 12:13

Dynamic Programming

DP обычно даёт $O^*(2^n)$ или хуже

TSP $n!$

$OPT(S, v)$ $S \supseteq \{v, s\}$

$\downarrow$

Наибольший суммарный вес ребер на пути, мн-во вершин $= S$, а оканчивается в v, а начинается в s

1. $OPT(\{s\}, s) = 0$ для остальных $OPT(S, *)$ где $|S| \le 1$ $OPT(S, *) = -\infty$

2. $|S| \ge 2$ $S \ni v$

$$OPT(S, v) = \max_{u \in S \setminus v} \{\underbrace{OPT(S \setminus v, u) + w(u, v)}\}$$

s u v

③

$\forall v \in V(G) \setminus s$ $OPT(V(G), v)$ — корректно

$O^*(2^n)$

$$\max_{v \in V(G) \setminus s} \{OPT(V(G), v) + w(v, s)\}$$

k-Coloring

$k \le 3$ $k = \{1, 2\}$

$O^*(k^n) \to O^*(\lceil k/2 \rceil^n)$

$3^{n/3}$

2^n

3^n

3^n

4^n

0000

$I_1, I_2, \dots, I_k$

k-раскр. $\Rightarrow IC(G, k)$

0000 $IC(G - I, k-1)$

$I =$

$IC(G, k) \Rightarrow$ k-раскр.

I $IC(G, k-1)$

$$\text{IsColorable}(G', k) = \bigvee_{\emptyset \subset I \subseteq V(G')} \text{IsCol}(G - I, k-1)$$

$\cancel{2}$ $\cancel{4^n}$

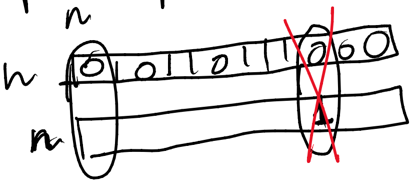
$$\text{IsColorable}(G, 1) = |E(G)| = 0$$

$O^*(2^n)$ $(2^n) \cdot 2^n$ 4^n

$O^*(2^n)$ $\qquad 2^n \cdot 2^n \qquad 4^n$

$2^n \cdot 3^{n/3} = (2 \cdot 3^{1/3})^n = \boxed{2.885^n}$

$\#\ (\underbrace{\underbrace{V(G')}, I}) =$ времени работы



(1) 3^n

$$\left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot 2^m \cdot 1^{n-m}\right) \quad m = |V(G')|$$

$(1+2)^n$ $\qquad I - 2^m$ вариантов

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot \cancel{m^{O(1)}} \cdot \left(3^{1/3}\right)^m \cdot 1^{n-m} = \left(1+\sqrt[3]{3}\right)^n$$

$\wedge$ 2.4423^n

Dom Set $\qquad \sim 1.9^n$

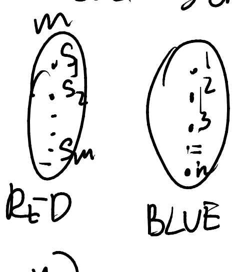
Set Cover: $\qquad U = [n]$

$O^*(2^m)$ $\qquad O^*(2^n)$ $\qquad S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq U$

$\binom{m}{k}$

Можно ли выбрать $\leq k$ мн-в $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$, кот. в объед. дают U.

Red-Blue Dom-Set



$v \in R \qquad N(v) = S_v$

$O^*(2^n)$

$OPT(X, i) =$ мин. число мн-в из $S_1, S_2, \ldots, S_i$, необх. для покрытия X.

$X \subseteq [n]$, $i \in [m]$

(1) $OPT(\emptyset, 0) = 0$

$OPT(S, 0) = +\infty$, $S \neq \emptyset$

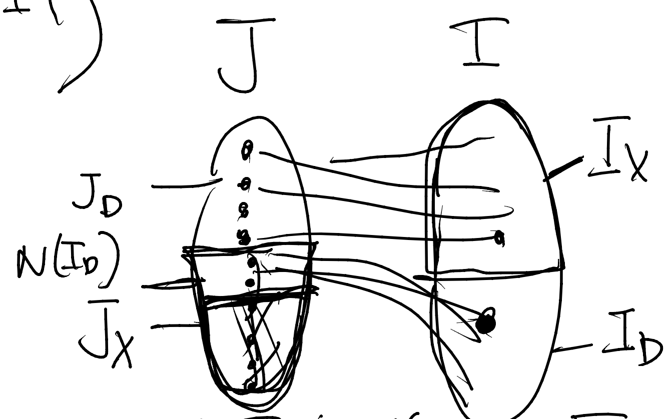
(2) $OPT(X, i) = \min\left(OPT(X, i-1), OPT(X \setminus S_i, i-1) + 1\right)$

② $OPT(X, i) = \min(OPT(X, i-1), OPT(\dots) + 1)$

Dom. Set / Independent Set I

$\downarrow$

$O^*(3^{n-|I|})$



Ищем нез. мн-во D

1. Переберем $J_D \subseteq J$

$J_D = J \cap D$

Доминируем нек. вершины в I: $N(J_D) \cap I$

$\cdot\ I \setminus N(J_D) \subseteq D$

$J_D \cup (\underbrace{I \setminus N(J_D)}_{= I_D})$ — доминирует всё I

$J_X := (J \setminus J_D \setminus N(I_D))$

RBDS (I_X, J_X) — за $2^{|J_X|}$ $\qquad |J_X| \le n - |I|$

$|J_X| \le |J| \le n - |I|$

При фикс J_D мы работаем время $2^{|J_X|} \le 2^{|J \setminus J_D|}$

$$\sum_{|J_D| = m = 0}^{|J|} \binom{|J|}{m} \cdot 2^{|J| - m} \cdot 1^m = 3^{|J|} = 3^{n-|I|} = 3^{(1-\alpha)n}$$

$|I| \ge \alpha n$

$1 - \alpha < \log_3 2$

нет $|I| \ge \alpha n$ $\rightarrow$ ответ на задачу $\le \alpha n$

есть $|I| \ge \alpha n$ $\rightarrow$ $\boxed{3^{(1-\alpha)n}}$

<u>Утв</u> Любое макс. по вкл. независ. мн-во яв-ся дом.

<u>Ал-м</u>. Переберем все мн-ва размера $\le \alpha n$ в графе, проверяем, что оно яв-ся ответом (DS)

$O^*\left(\binom{n}{\alpha n}\right)$

$\dots H(\alpha)n)$

$O\left(\binom{n}{\alpha n}\right)$

$$\frac{n!}{(\alpha n)!\,((1-\alpha)n)!}$$

При $\alpha < 1/2$ $\binom{n}{\alpha n} = O^*\left(2^{H(\alpha) n}\right)$

$$\boxed{H(\alpha) = -\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha)\log_2 \alpha}$$

$H(\alpha) < 1$ для $\alpha \in (0, 1/2)$

- Выписываем все подмн-ва р-ра $\leq \lceil \alpha n \rceil$
- Среди них есть DS $\Rightarrow$ выдаем min по размеру
- Берем макс. по р-ру IS среди них $\to$ $= \lceil \alpha n \rceil$
- Запускаем $3^{(n-|I|)}$

$$\max\left\{ 2^{H(\alpha) n}, \boxed{3}^{(1-\alpha)n} \right\} \quad \alpha = 0.391$$

$3 \to 2$, $\geq \boxed{1.9527}^n$