29 сентября 2021 г. 10:32

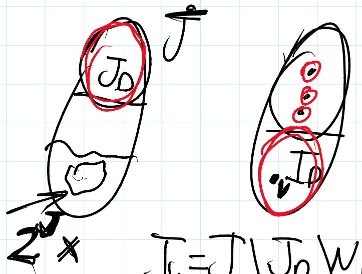
Dynamic Programming 2.

План

- Dom Set 1.7088^n
- Steiner Tree $3^{|T|}$

Permutation problems

- Directed Feedback Arc Set
- Pathwidth



$$\underbrace{\sum_{|J_D|} \binom{|J|}{|J_D|} \cdot 2^{|J|-|J_D|}}$$

$J_X = J \setminus J_D \setminus N(I_D)$ $\quad J_{D,1} \quad J_{D,2}$

Для подмножества $J_X \subseteq J$ $\quad 2^{|J|}$

$OPT'(J_X)$ = min число вершин из $I \setminus I_D$ нужное, чтобы покрыть J_X.

избавиться от I_D хотим

$OPT(J_X) = OPT'(J_X)$

$OPT(J_X)$ = min число вершин из I нужное, чтобы покрыть (доминир.) J_X.

Утв $OPT(J_X)$ не может содержать верш. из I_D.

$OPT(J_X) \cap I_D = \emptyset$

proof $I_D \cap OPT(J_X) \ni v \to \not\exists$ $OPT(J_X) \setminus \{v\}$ - это все еще DS для J_X □

Посчитаем OPT за $2^{|J|}$:

$$\forall X \subseteq J,\ X \neq \emptyset \quad OPT(X = Y \cup \{v\}) = \min_{u \in N(v) \cap I} OPT(X \setminus N(u)) + 1$$

- Для каждого $J_D \subseteq J$:

$I_D = I \setminus N(J_D)$

$J_X = J \setminus N(I_D) \setminus J_D \setminus N(J_D)$

ответ для фикс. J_D есть $|I_D| + |J_D| + OPT(J_X)$

$|T|$ $(1-\alpha)n$

ответ для фикс. U_D есть $|I_D| + |U_D| + OPT(\ldots)$

$|I| = \alpha n \to 2^{(1-\alpha)n}$

Перебираем все подмн-ва $V(G)$ р-ра $\le \lceil \alpha n \rceil$

– Если встретилось нез-ое р-ра $= \lceil \alpha n \rceil \Rightarrow$ зат. $2^{(1-\alpha)n}$

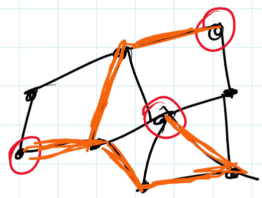
– Значит макс. нез-ое $< \lceil \alpha n \rceil \Rightarrow DS$ р-ра $\le \lceil \alpha n \rceil$

$$\max\left(2^{(1-\alpha)n},\ 2^{H(\alpha)n}\right) \le 1.7088^n$$

$$2^{(1-\alpha)n} = 2^{H(\alpha)n} \Rightarrow \alpha = \ldots$$

$\cancel{2^{H}}$

STEINER TREE



Input: G со взв. ребрами

$T \subseteq V(G)$

Question: найти min по суммарному весу ребер связный подграф G, содержащий все вершины из T

$T = V(G)$

$2^{|V(G)| - |T|}$ ← перебираем верш. кроме T, которые войдут в результат

– зафикс. $X \subseteq V(G) \setminus T$

– найдем min. остов $G[X \cup T]$

$2^{|T|} \to 3^{|T|}$

$\Big[\ OPT(v, S, k) =$ min вес связного подграфа, который содержит вершины $v \cup S$. на не более, чем k вершинах

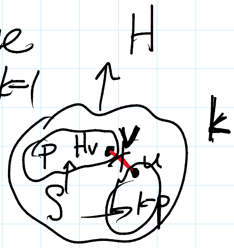
$v \in V(G)$, $S \subseteq T$

ответ на задачу $\min\limits_{v \in V(G)} \min\limits_{k \in [n]} OPT(v, T, k)$

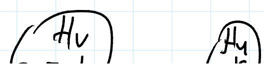
$\forall t \in T \quad OPT(t, \{t\}, 1) = 0$

$\forall v \in V(G) \quad OPT(v, \varnothing, 1) = 0$

остальные OPT для $k=1$ $= +\infty$



$OPT(v, S, k) =$



(S, S_v) $3^{|T|}$

$$OPT(v,S,k) = \min_{u \in N(v)} \ \min_{k_v=1}^{k-1} \ \min_{S_v \subseteq S} \left(OPT(v,S_v,k_v) + OPT(u, S\setminus S_v, k-k_v) + w(v,u) \right)$$

(S, S_v) $3^{|T|}$

~~Корректность~~ Индукция по k.

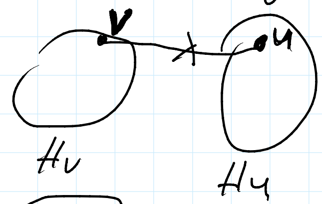
$k=1 \to OK$

$k>1$ для $k' < k$ верно

$(OPT(v,S,k) \le w(H))$

H - мин. связный подгр. содерж. $v \cup S \subseteq V(H)$, $|V(H)| = k$

$V(H) \le k$



$k_v := |V(H_v)|$

$k_u = k - k_v \ge |V(H_u)|$

$w(H) = w(H_v) + w(u,v) + w(H_u)$

$OPT(v,S_v,k_v) + w(u,v)$ $\quad OPT(u,S_u,k_u) \ge OPT(v,S,k)$

0 $\begin{cases} S = \emptyset \\ S = \{v\} \end{cases}$

опт. граф с пар. v, S, k

Док-ем, что $OPT(v,S,k) \ge w(H)$

- Предп., что $OPT(v,S,k) < w(H)$
- Строим H' с пар-ми v, S, k такой, что $w(H') \le OPT(v,S,k)$
- $w(H) > w(H')$ – противоречие

Строим H': $\exists$ u, k_v, S_v при кот. $OPT(v,S,k) = \underbrace{OPT(v,S_v,k_v)}_{= w(H_v)} + w(u,v) + \underbrace{OPT(u,S_u,k_u)}_{= w(H_u)}$

$E(H') = E(H_v) \cup E(H_u) \cup \{uv\}$

$V(H') = V(H_v) \cup V(H_u)$ $\quad |V(H')| \le k_v + k_u$

$w(H') \le w(H_v) + w(u,v) + w(H_u)$

$w(H') = w(H_v) + w(u,v) + w(H_u) - w(E(H_v) \cap E(H_u))$

Отр. ребра $- \boxed{?}$

$\min\left(2^{n-|T|}, \ 3^{|T|}\right)$

$2^{n-|T|} = 3^{|T|}$ $\quad (2^{|T|})$ $\quad (1 - \frac{1}{\ldots})^n$

$$2^{n-|T|} = 3^{|T|}$$

$$2^{n} = 2^{\log_2 3 \cdot |T| + |T|}$$

$$2^{|T|}$$

$$|T| = \frac{n}{(\log_2 3 + 1)}$$

$$2^{\left(1 - \frac{1}{\log_2 3 + 1}\right) n}$$

$$\parallel$$

$$2^{\frac{\log_2 3}{\log_2 3 + 1} n}$$