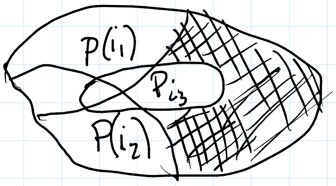
6 октября 2021 г. 10:31

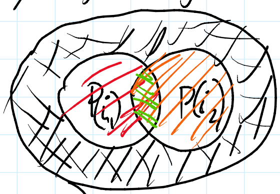
Inclusion – Exclusion principle

Считаем некоторые объекты $\mathcal{N}$

$P(i_1), P(i_2), \dots, P(i_n)$ — n свойств $N = |\mathcal{N}|$

Хочу узнать число объектов в $\mathcal{N}$, которые не обладают ни одним из $P(i_1), \dots, P(i_n)$





$N(0) = N - \underbrace{N_{i_1}}\ \underbrace{-N_{i_2}} + N_{i_1 i_2}$

Thm (Incl.-Excl. pr. / Ф-ла вкл.-искл.)

$$N(0) = N - \sum_{i_1} N_{i_1} + \sum_{i_1, i_2}{}' N_{i_1, i_2} - \sum_{i_1<i_2<i_3} N_{i_1, i_2, i_3} + \dots + (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\dots<i_k} N_{i_1, i_2, \dots, i_k} + \dots$$

где $N(0)$ — # объектов, не обл. ни одним из n св-в

$N_{i_1, \dots, i_k}$ — # объектов, обл-х св-вами $i_1, \dots, i_k$.

proof $\forall$ объекты, набор св-в которых в точности равен $W \subseteq [n]$

$W = \emptyset$ слева – 1 раз справа – 1 раз с коэф. 1

$|W| > 0$. слева – 0 раз справа – ?

$W = \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$, где $s = |W|$ объект такой входит в $N_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, если $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq W$

$2^{|W|}$ $\quad \sum_{S \subseteq W} (-1)^{|S|} = 0$

$S \Leftrightarrow S \Delta \{j_1\} \quad \sum_{|S|}{}' \binom{|W|}{|S|} (-1)^{|S|} = (1 + (-1))^{|W|} = 0$, поскольку $|W| > 0$ ∎

Пусть $Q(i)$ — нек-й набор n св-в

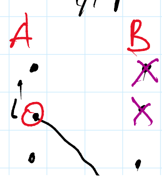
Пусть мы ищем # объектов, которые обладают всеми св-вами $Q(1), \dots, Q(n)$

Thm Их число равно $X = \sum_{W \subseteq [n]}{}' N(W) \cdot (-1)^{|W|}$ — число объектов, которые не обл. ни одним св-вом из W.

proof $P(i) \Leftrightarrow$ не обл. св-вом $Q(i)$ ∎

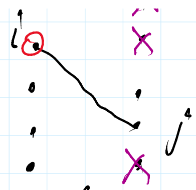
BINARY PERMANENT (#PERFECT MATCHINGS) #P-complete

$\mathrm{perm}(A_{n,n}) = \sum_{\pi \in S_n} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)}, \dots, a_{n,\pi(n)}$



$\Leftrightarrow a_{ij} = 1$

$\mathrm{perm}(\cdot_{n,n}) = \sum_{\pi\in S_n} a_{1,\pi(1)}, a_{2,\pi(2)}, \dots, a_{n,\pi(n)}$



$\Leftrightarrow a_{ij} = 1$

1. Хотим считать сов-е паросоч

2. Ослабим - это набор из n различных ребер графа, которые не свп. в левой доле

перестановка π соотв. сов. паросоч.

$\Updownarrow$

$a_{1,\pi(1)}, a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)} = 1$

3. Свойства

$Q(i)$ — вершина i справа покрыта нашим набором из n ребер

$$\prod_{v\in A} \deg_G(v) = \mathcal{N}(G)$$

Хотим, чтобы п.1 = п.2, обл. всеми Q из п.3 ✓

$N(W)$ = # наборов ребер, которые не задевают ни одну в-ну из W

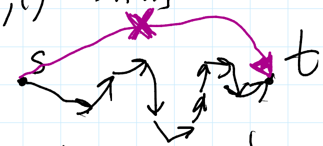
$N(W) = \mathcal{N}(G-W)$ — за $\mathrm{poly}(n)$

$2^n \cdot \mathrm{poly}(n) = \Theta(2^n)$ poly-space

#-DIRECTED HAMILTONIAN (s,t)-PATH

$n+2$

G - ор. граф



#(s,t)-путей, прох. по всем в-нам графа G

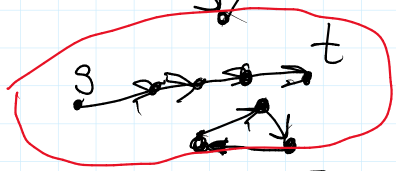
2. Набор из $n+1$ ребер, что из s выходит ровно одно и из t выходит ровно одно

$\deg_-(s) \cdot \deg_+(t) \cdot \binom{\text{ребра, не инц. } s \text{ и } t}{n-1}$

3. $Q(i)$ − в наборе есть ребро, инц. вершине v_i

Утв Объекты из 2, обл. всеми $Q(i) \Longleftrightarrow$ гамильтоновы (s,t)-пути

~~Утв~~ У таких объектов у каждой v_i ровно одно вх. и ровно одно вых. ребро



Нам PATH $\exists$ мн-во из $n+1$ ребра, что у к-й V_i ровно 1 входящее, ровно 1 вых.

2'. (s,t) - непростой путь длины $n+1$ path $\subseteq$ walk

$A = \{a_{i,j}\}$ $a_{i,j} = 1$, если есть ребро $i \to j$

$(n+2)\times(n+2)$

$(A^{n+1})_{s,t}$ = # walk из s в t длины $n+1$ $= \mathcal{N}(G)$

3. Нам (s,t) - path $\Longleftrightarrow$ (s,t) - walk длины $(n+1)$, который покрывает каждую V_i хотя бы 1 раз

$N(W) = \mathcal{N}(G-W)$ - poly(n)

$\Theta^*(2^n)$ poly - space

BIN PACKING

$w_1 \; w_2 \; \dots \; w_i \; \dots \; w_n$

n предметов

$B(\emptyset) = 0$

$B(X) = \min_{Y\subseteq X, |w(Y)| \le B} B(X\setminus Y) + 1$

$B(S)$ = мин. число пакетов для пр-в с номерами из S

3^n

2^n

Пакет вмещает B кг. Можно ли уместить предметы в k пакетов?

1. Хотим узнать, есть ли хотя бы одно разбиение предметов по k пакетам $2^n \cdot B$ poly space от B

2. – Предмет можно использовать много раз
   – Предмет можно вообще не класть в пакет

Хотим посчитать такие наборы пакетов $T^k \to \left(\sum_{x=0}^{B} T(x)\right)^k$

число возможных пакетов, что там сум. вес $\le B$

пос-ть предметов

пол-ть предметов

число возможных пакетов, что там сум. вес $\leq B$

$T(X)$ = число пакетов, в которых сум. вес $= X$

$$T(X) = \sum_{\substack{i=1 \\ w_i \leq X}}^{n} T(X - w_i) \qquad T(0) = 1 \qquad \boxed{O(B)}$$

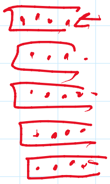
Утв $T(X)$ = число посл-ей $i_1, i_2, \ldots, i_\ell$ таких, что $\sum_{j=1}^{\ell} w_{i_j} = X$

3. $Q(i)$ — мы предмет с номером i хотя бы 1 раз исп.

$N(W)$ = # способов набрать k пакетов так, $\forall i \in W$ не взят ни 1 раз

$O(2^n \cdot B)$ $\quad O(B)$

>0 $\qquad = 0 \to$ нет



#Coverings

$\mathcal{U} = [n]$ $\qquad S \subseteq 2^{[n]}$ $\qquad k$

k = min количество мн-в для покрытия

Set Cover ✓

#Min Set Cover ✓

$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ $\qquad S_i \subseteq \mathcal{U}$

число посл-ей длины k $\underline{i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k}$, т.,что $\bigcup_{j=1}^{k} S_{i_j} = \mathcal{U}$

1. Хотим считать число упорядоч. покрытий из k мн-в
2. Не заставляем каждый эл-т покрывать ≥ 1 раза $\quad m^k$
3. $Q(i)$ – эл-т с номером i должен быть покрыт

$N(W)$ - число посл-й, не покрыв. эл-ты из W

$s[W]^k$ $\qquad s[W] = \left|\{S \in S : S \cap W = \emptyset\}\right|$

$\sum (-1)^{|W|} s[W]^k$

$s[W]$ ...

$$\sum_{W\subseteq[n]} (-1)^{|W|} s[W]^k$$

$N(W)$ считается за ~~m·n·k~~ $poly(m,n,k)$

$O(2^n \cdot poly(m,n,k))$ $O(mn)$

2. Число неупорядоч. наборов из k различных множеств $\binom{m}{k}$

3. $N(W) = \binom{s[W]}{k}$ $\dfrac{(s[W])!}{(s[W]-k)!\,(k)!} = \dfrac{s[W]\cdot(s[W]-1)\cdot(s[W]-2)\cdots(s[W]-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$

k-COLORING (разб.) 2.4423^n сущ-ет, тогда и только тогда, когда сущ-ет покрытие графа k независимыми мн-вами

#COVERINGS

$U = V(G)$ S = мн-во всех нез мн-в графа G

$|S|$ может быть порядка 2^n!

$s[W]$ работает за $|S|\cdot n = O^*(2^n)$

4^n. 2^n считаем $N(W)$ $2^n\cdot 2^n = 4^n$

$s[W]$ = число нез-х мн-в, которые не содержат в-н из W

$2.4423 \approx (1+\sqrt[3]{3})$

$= \#IS(G-W)$ → время $(2^{n-|W|})$

$1.2461^{n-|W|}$ → poly space

$$\sum_{W\subseteq[n]} T(W) = \sum_{W\subseteq[n]} 2^{n-|W|} = 3^n$$

3^n k-COLORING poly space

$(2.2461)^n$ / poly-space

оставить все так же, но считать раскр. наилучшим

увеличить до 2^n, но уменьшить время

k-partitions

U, $S \subseteq 2^U$

k-partitions

U, $S \subseteq 2^U$

Число посл-й $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ таких, что ~~$S_{i_j} \cap S_{i_t} = \emptyset \Leftrightarrow j \neq t$~~

$\bigcup S_{i_j} = U$ $\quad \sum |S_{i_j}| = n$

i_1, i_2, i_3, i_4

разбиение $\Leftrightarrow$ покрытие, в котором сумма размеров мн-в $= n$

1.

2. Объекты — посл-ти $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ такие, что их сумма р-ров равна n.

$T(p, X, j)$ = число посл-й, в которых ровно p индексов $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, при этом $\sum_{t=1}^{p} |S_{i_t}| = X$ & $i_p = j$

$$T(p, X, j) = \sum_{j' < j} T(p-1, X - |S_j|, j')$$

$$T(1, X, j) = \begin{cases} 1, & X = |S_j| \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

~~$T(0, \ldots) = 1$~~

$$\sum_{i=1}^{m} T(k, n, i)$$

$2^n \cdot poly(m, n, k)$