#k-PARTITIONS Time, Space $O^*(2^n)$

$\mathcal{S} \subseteq 2^U$

↳ массив р-ра 2^n

$2^n \cdot n$ ← $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \dots, \mathcal{S}_n$

$$\mathcal{S}[S] = \begin{cases} 0, & S \notin \mathcal{S} \\ 1, & S \in \mathcal{S} \end{cases} \qquad \mathcal{S}'[j, S] = \begin{cases} 0, & S \notin \mathcal{S} \vee |S| \neq j \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$N(W, j)$ = число $S \in \mathcal{S}$, не пересек. W, при этом $|S| = j$

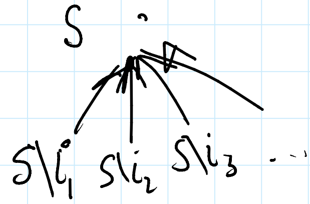
$$\zeta\mathcal{S}(S) = \sum_{X \subseteq S} \mathcal{S}(X)$$

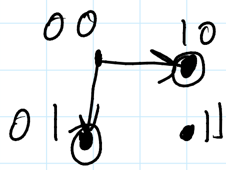
$$N(W, j) = \zeta\mathcal{S}_j(U \setminus W) = \sum_{X \subseteq U \setminus W} \mathcal{S}(j, X)$$

Цель: ζ-преобразование за $O^*(2^n)$

```
for X ⊆ U:
  | for i ∈ X:
  |   | S[X] += S[X \ {i}]
```

[for $i \in U$:
  for $\{i\} \subseteq X \subseteq U$:





$$\zeta_0\mathcal{S} = \mathcal{S} \to \zeta_1\mathcal{S} \to \zeta_2\mathcal{S} \to \zeta_3\mathcal{S} \to \dots \to \zeta_n\mathcal{S}(X)$$

$$\zeta_i\mathcal{S}(S) = \sum_{S \setminus \{1,2,\dots,i\} \subseteq X \subseteq S} \mathcal{S}(X)$$

$$\zeta_i\mathcal{S}(S) = \sum_{S \setminus \{1,2,\dots,i\} \subseteq X \subseteq S} \mathcal{S}(X) + \sum \mathcal{S}(X)$$

$$\mathcal{L}_i\, \delta(S) = \sum_{\substack{S\setminus\{1,2,\dots,i\} \subseteq X \subseteq S \\ X \ni i}} \delta(X) + \sum_{\substack{S\setminus\{1,2,\dots,\cancel{i}\} \subseteq X \subseteq S\setminus\{i\} \\ \cancel{X \not\ni i}}} \delta(X)$$

$S\setminus\{1,2,\dots,i-1\} \subseteq X \subseteq S$

$\mathcal{L}_{i-1}\, \delta'(S)$

$\mathcal{L}_i\, \delta(S\setminus\{i\}) = \mathcal{L}_{i-1}\delta(S\setminus\{i\})$

$\mathcal{L}_i\, \delta(S) = \mathcal{L}_{i-1}\delta'(S)$, если $i \notin S$

$\mathcal{L}_i\, \delta'(S) = \mathcal{L}_{i-1}\delta'(S) \cancel{+} - \mathcal{L}_{i-1}\delta(S\setminus\{i\})$, если $i \in S$

$\text{poly}(n) \cdot 2^n$

SUBSET CONVOLUTION

$\sum \underbrace{\binom{n}{k}} a^k b^{n-k}$

$f, g : \{0,1\}^n \to \mathbb{Q}$

$\sum_{X \subseteq [n]} a^{|X|} b^{|[n]\setminus X|}$

$f * g : \{0,1\}^n \to \mathbb{Q}$

$\forall S \subseteq [n] \quad (f*g)(S) = \sum_{X \subseteq S} f(X) \cdot g(S\setminus X)$

$f(S) = a^{|S|}$

$g(S) = b^{|S|} \quad (f*g)([n])$

$f*g(S) = \sum_{X \subseteq S} f(X) \cdot g(S\setminus X) \qquad \mathcal{L}f(S) \cdot \mathcal{L}g(S)$

$f'(X) = (-1)^{M} \cdot f(X)$

$= \sum_{X,Y \subseteq S} f(X) \cdot g(Y)$

$\mathcal{L}\, f'(S) \cdot (-1)^{|S|} = \mu(S) \qquad (-1)^{|S|} \cdot (-1)^{|X|}$

$X \cup Y = S$

$\mu f(S) = \sum_{X \subseteq S} \boxed{(-1)^{|S\setminus X|}} \cdot f(X)$

$\mu f = f * (-1)^{|S|}$

$\mathcal{L} f = f * \mathbf{1}$

$\mu(\mathcal{L}f) = f$

$\mathcal{Z}f = f * \mathbb{1}$

$\mu(\mathcal{Z}f) = f$

$$\mu\mathcal{Z}f(S) = \sum_{X \subseteq S}' (-1)^{|S \setminus X|} \mathcal{Z}f(X) = \sum_{X \subseteq S} (-1)^{|S \setminus X|} \sum_{Y \subseteq X}' f(Y) =$$

$$= \sum_{Y \subseteq S} \left(f(Y) \cdot \sum_{X \supseteq Y} (-1)^{|S \setminus X|} \right) = \sum_{Y \subseteq S} f(Y) \cdot \sum_{Z \subseteq S \setminus Y}' (-1)^{|S \setminus Y \setminus Z|}$$

$X = Y \cup Z$

$\underset{\displaystyle f(S)}{\|}$ $\qquad (1 + (-1))^{|S \setminus Y|}$

$$\mu(\mathcal{Z}f \cdot \mathcal{Z}g)(S) = \sum_{X \subseteq S}' (-1)^{|S \setminus X|} \mathcal{Z}f(X) \cdot \mathcal{Z}g(X) =$$

$$= \sum_{X \subseteq S}' (-1)^{|S \setminus X|} \sum_{Y, Z \subseteq X}' f(Y) \cdot g(Z)$$

$$= \sum_{Y, Z \subseteq S} \left[f(Y) \cdot g(Z) \cdot \left(\sum_{X \supseteq Y \cup Z} (-1)^{|S \setminus X|} \right) \right]$$

$$= \sum_{|Y| + |Z| = |S|}' f(Y) \cdot g(Z) \sum_{T \subseteq S \setminus (Y \cup Z)} (-1)^{|S \setminus (Y \cup Z) \setminus T|} \rightarrow (1 + (-1))^{|S \setminus (Y \cup Z)|}$$

$$\sum_{Y \cup Z = S}' f(Y) \cdot g(Z) = \mu(\mathcal{Z}f \cdot \mathcal{Z}g)(S) = f *_c g$$

$Y \cap Z = \emptyset$ $\quad |Y| + |Z| = S$

$$\mu\Big(\underbrace{\sum_k' \mathcal{Z}f_k \cdot \mathcal{Z}g_{|S| - k}} \Big)(S)$$

$$\mathcal{Z}f(k, S) = \sum_{\substack{X \subseteq S \\ |X| = k}} f(X)$$

Thm По данной ф-ии $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{-M, \dots, M\}$
μf & $\mathcal{Z}f$ можно вычислить за $\mathrm{poly}(n) \cdot \log M \cdot 2^n$

μf & ζf можно вычислить за $\mathrm{poly}(n)\cdot \log M \cdot 2^n$

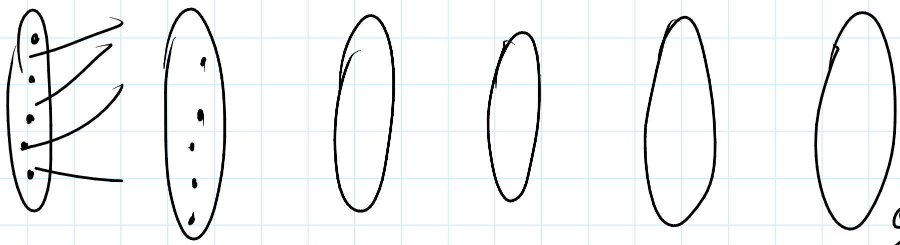
Cor $f*g$ можно посчитать за $\mathrm{poly}(n)\cdot \log M\cdot 2^n$

$$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

$$f[S] = [S \in \mathcal{S}]$$

$$\underbrace{f*f*f*f*f}_{f \text{ встреч. } k \text{ раз}}(S) = \text{число упорядоч. разбиений } S \text{ на } k \text{ мн-в из } \mathcal{S}$$

$$f*f*f$$



$$g(\ell,S) = \begin{cases} 1, & f(S)=\ell \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$f(S)$ = число ребер, выходящих наружу из S

$$f(\varnothing) = +\infty$$

$(+,*)$

$\downarrow$

$(\min,+)$

$$\min_{\substack{S_1,S_2,\dots,S_k \\ S_1\sqcup S_2\sqcup}} \quad f(S_1)+f(S_2)+f(S_3)+\dots+f(S_k) \to \min$$

$$D(k,S,\ell) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ мн-в в объед. дают } S \text{ и сумма } f \text{ по этим мн-вам равна } \ell \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$D(k,\cdot,\ell) = \sum_{\ell'\le\ell} g(\ell',\cdot) * D(k-1,\cdot,\ell-\ell')$$

$$\Big[\,D(k,S,\ell) = \bigvee_{X\subseteq S} D(k-1, S\setminus X, \ell-f(X))$$

$$(f \circledast g)(S) = \max_{X \subseteq S} \left[f(X) + g(S \setminus X) \right]$$

$$\max \to +, \quad + \to *$$

$$f'(S) = \beta^{f(S)}$$

$$g'(S) = \beta^{g(S)}$$

$$(f' * g') = \sum_{X \sqcup Y = S} \beta^{f(X) + g(Y)}$$

$$(f \circledast g) = \lfloor \log_\beta (f' * g') \rfloor$$

$$\| \quad \sum a_i \beta^i$$

a_i — сколько способов, i — $f(X) + g(Y)$

$\beta > a_i$

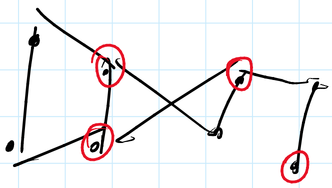
$\beta = 2^{n+1}$

$$f, g : \{0,1\}^n \to \{0, \ldots, M\}$$

$$f', g' \to \{1, \ldots, 2^{(n+1)M}\}$$

Thm $\circledast$ (по $(\max, +)$) выч. за $2^n \cdot poly(n) \cdot M^{O(1)}$

STEINER TREE с k терм. за 2^k



Нужно найти мин. связный подграф, содерж. все k вершин

$ST(v, k, S)$ = min связный подграф, содержащий $\{v\} \cup S$ на k вершинах

S — мн-во терминалов

$$ST(v, k, S) = \min_{u \in N(v)} \min_{k' \le k,\, S' \subseteq S} ST(u, k', S') + 1 + ST(v, k - k', S \setminus S')$$

$ST(v, k) : \{0,1\}^k \to [n]$

$ST(v, k) = \min_u \min_{k'} ST'(u, k') \circledast ST(v, k - k')$

$ST(v,k): \{0,1\} \to [n]$

$ST'(v,k) = ST(v,k) + 1$

$ST(v,k) = \min_u \min_{k'} ST'(u,k') \circledast ST(v, k-k')$

G, k Макс. по размеру порожденный подграф, который раскр. в k цветов

$f(S) = 1 \iff S$ - незав. мн-во

$G[S]$ раскр. в k цветов

$\underbrace{f * f * f * f}_{k} (V(G))$