Measure & Conquer

Branching $\to$ branching rules

мн-во правил
(мн-во векторов)
чем больше убрали, тем лучше

n (число верш.) $\quad m$ (число ребер)

Мера $\mu(G) \geq 0$

1. Br. rule / Red. rule $\quad G \to G' \quad \mu(G') < \mu(G)$
2. $\mu(G) \leq f(n)$ $\quad \tau(\mu(G)-\mu(G_1), \mu(G)-\mu(G_2), \dots, \mu(G)\dots$
3. $\mu(G) \leq c$ — решаем за poly

$O^*(c^{f(n)})$ $\quad$ c

Предл. Оценку ветв. алг-ма можно улучшить с пом. правильно выбр. меры

$MIS(G)$

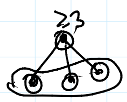
- Избавляемся от в-н ст. 0 и 1 $\quad 1 + MIS(G - N[v])$
- если $\Delta(G) = 2$, то решим за poly
- берем v с max $\deg(v)$

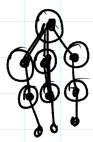
$$MIS(G) = \max(MIS(G-v), MIS(G-N[v]) + 1)$$

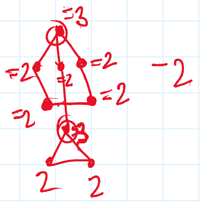
$(\tau(1,4))^{n - n_{=0} - n_{=1} - n_{=2}}$

$\downarrow$ w
1.3803 $\quad$ I. $\mu(G) = n_{\geq 3}(G)$

1 $\quad G - v$ $\qquad$ 1 $\quad G - N[v]$







В-ны ст-ни 2 нужно учитывать $\to$ с весом $\frac{1}{2}$
В-ны ст-ни ≥ 3 $\to$ с весом 1 $\quad \to 1.3248^n$

II. $\mu(G) = 0.5 n_{=2} + n_{\geq 3} \qquad \mu(G) \leq n$

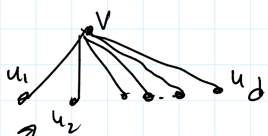
Утв $MIS(G)$ раб. $O^*(1.3248^n)$ $\quad \tau(1,5)$

proof

$v \to$ в-на макс. степени ст. $= d$

$\Delta(G) = d \quad \delta(G) \geq 2$

$N(v) = u_1, u_2, \dots, u_d$



OUT

пусть $u_1, u_2, \dots, u_k$ ст. $= 2$
$u_{k+1}, \dots, u_d$ ст. > 2

$\mu(G) \to \mu(G-v) = \mu(G) - 1 - \frac{1}{2} \cdot$ кол-во пусть $u_1, u_2, \dots, u_k$ ст. $=2$

$u_{k+1}, \dots, u_d$ ст. >2

$\mu(G) \to \mu(G-v) = \mu(G) - 1 - \frac{1}{2} \cdot$ кол-во сос. $=2,3$

$\mu(G - N[v]) = \mu(G) - 1 - \frac{1}{2} \cdot$ сос. $=2$ $- 1$ все сос. ст. ≥ 3

IN $d - \frac{1}{2}k$

Утв $\left.\begin{array}{l} IN + OUT \geq 2+d \\ IN, OUT \geq 1 \end{array}\right) \to$ худш. $(1, d+1)$

$d \geq 4 \to (1,5)$

$d=3$

$OUT = 1 + \frac{1}{2}d = 2.5$

$\tau(2.5, 2.5)$

$IN = 1 + \frac{1}{2}$ кол-во ст. $=2$ $+$ кол-во сос ст. $=3$ ≥ 2.5

$\approx$ 1.302

$$\mu(G) = \sum_{i=0}^{n} w_i n_{=i}$$

$n_{=i}$ — кол-во, в-н ст. i

$w_i \leq 1$

$w_2 = \frac{1}{2}$ $\quad w_3 = 1$

$w_{3+i} = 1$

$\left.\begin{array}{l} w_2 = \frac{4}{7} \\ w_3 = \frac{6}{7} \\ w_i = 1 \text{ для } i \geq 4 \end{array}\right)$ можем ли улучшить оценку с такой мерой?

1.3^n

$\tau(1,6) < 1.2852$

$OUT = \cancel{1} + \cancel{(w_3 - w_2) \cdot d_3} + w_2 \cancel{d_2} + (1 - w_3) \cdot d_4$

$IN = \cancel{1} + \cancel{w_2 \cdot d_2} + \cancel{d_3} \cdot w_3 + (d - d_2 - d_3)$

$OUT + IN = 2 + 2w_2 d_2 + 2 d_3 w_3 - w_2 d_3$

$IN + OUT = 2 + 2w_2 \cdot d_3 + 2w_2 \cdot d_2 + (2w_2 - 1) \cdot d_4 + (d - d_2 - d_3)$

$\shortparallel$

$2 + (2w_2 - 1) \cdot (d_3 + d_2 + d_4) + d$

$2w_3 - w_2 = 2w_2$

$1 - w_3 = 2w_2 - 1$

$2w_3 = 3w_2$

$1 - \frac{3}{2}w_2 = 2w_2 - 1$

$2 = \frac{7}{2} w_2, \quad w_2 = \frac{4}{7}$

$d = 4 \to IN + OUT = 2 + 2w_2 \cdot d \to \frac{46}{7}$

$\left(\frac{11}{7}, \frac{35}{7}\right)$

14 32

$OUT \geq 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$

$d = 3$ $\quad 2 + \frac{8}{7} \cdot 3 \to \frac{38}{7}$

$\frac{4}{7} d_2 \quad \frac{2}{7} d_3 \quad \frac{1}{7} d_4$

$\tau\left(\frac{13}{7}, \frac{25}{7}\right)$

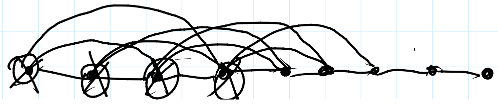
$\vee$

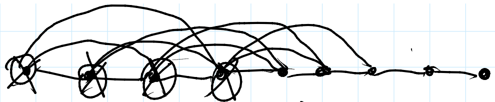
1.3031

$OUT \geq 1 + \frac{6}{7} = \frac{13}{7}$

Пусть алг-м ветвится не по max степени, а по любой степени ≥ 3

$\Omega\left(\tau(1,4)^n\right)$





$T(n) \geq T(n-1) + T(n-4) \rightarrow T(n) \geq 1.3804^n$

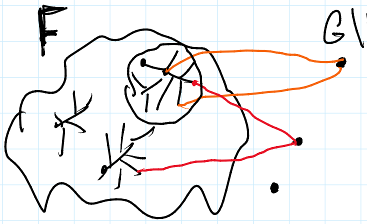
Feedback Vertex Set

Из графа удалить $\leq k$ в-н, чтобы он стал лесом

Maximum Induced Superforest

F - мн-во вершин

Найти макс. по р-ру F', что $F' \supseteq F$ & $G[F']$ - лес



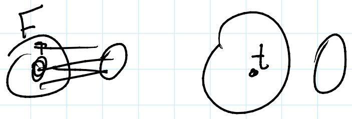
Пусть T - к.с. в $G[F]$

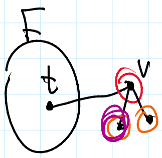
Def compress $(T \rightarrow t)$

- стягивает в-ны из T в одну в-ну t
- удаляет все в-ны из $G \setminus F$, у которых 2 ребра в t.

Def Пусть $\mathcal{M}_G(F)$ - кол-во надлесов F, макс. по размеру

Утв $X \in \mathcal{M}_G(F) \Leftrightarrow X \setminus T \cup \{t\} \in \mathcal{M}_{G'}(F \setminus T \cup \{t\})$, $G \xrightarrow{T \rightarrow t}$





Утв $\forall F \; \forall t \in F \; \forall v \in N(t) \setminus F$, $N(v) \cap F = \{t\}$

$\exists X \in \mathcal{M}_G(F)$, что $\left[\begin{array}{l} v \in X \\ |X \cap N(v) \setminus F| \geq 2 \end{array}\right.$

proof Возьмем $X \in \mathcal{M}_G(F)$, кот. не удовл.

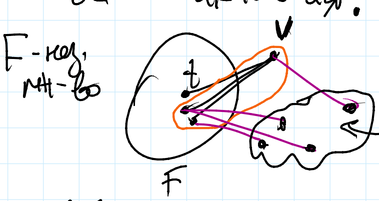
$v \notin X \quad |N(v) \cap X| \leq 1$

$X \rightarrow X \setminus N(v) \cup \{v\}$

X - макс. надлес $\quad X \cup \{v\}$ - не лес

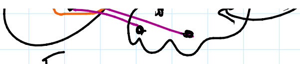
Все циклы в $X \cup \{v\}$ $\square$

$t \in F$ - активная. Ветвимся по $v \in N(t) \setminus F$



$gd(v) = N(N(v) \cap F \setminus \{t\}) \setminus F$

if $(G \ldots F) \ldots$ Рассм. ... $\ldots = \min(C_i \ldots F \cap C_i)$



$\mathrm{mif}(G, F, t)$:

(-1) Если G несвязный, то объед. ответы по $\mathrm{mif}(C_i, F \cap C_i)$

(0.) Если F не яв-ся н. мн-вом, то compress

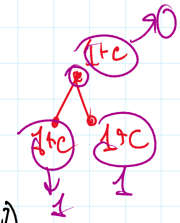
(1.) $F = V \Rightarrow$ есть ответ

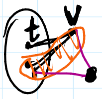
(2.) $F = \emptyset$ $\Delta(G) \le 1$, то ответ V

(3.) $F = \emptyset$ и $\Delta(G) \ge 2$, тогда для t с ≥ 2

$\max(\mathrm{mif}(G - t, F), \mathrm{mif}(G, \{t\}))$

$1{+}c$ $\quad 1{+}c{+}(2c)$



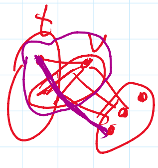


(4.) Зафикс. активную в-ну $t \in F$.

(5.) Если есть $v \in N(t)$ с $gd(v) \le 1$, то $\mathrm{mif}(G, F) = \mathrm{mif}(G, F \cup \{v\})$

(6.) Если есть в-на $v \in N(t)$ с ≥ 3 необщ. соседями, то

$1{+}3c$ $\quad \mathrm{mif}(G, F \cup \{v\})$ $\quad \mathrm{mif}(G - v, F)$ $\quad 1$



$1 \to 0$

$\boxed{1{+}c \to 1}$

(7.) $gd(v) = 2$, то $\left[\begin{array}{l} v \in F \\ w_1, w_2 \in F \quad v \notin F \end{array}\right.$

1 $\quad 1 \to 1{+}c$

$1{+}c$

$$\mu(G, F) = |V \setminus F| + c \cdot |V \setminus (F \cup N(t))|$$

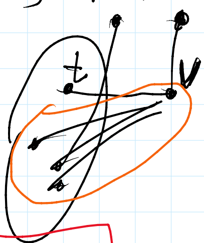
$$\mu(G, F) \le (1+c) \cdot |V \setminus F| \qquad \beta^{(1+c) \cdot n}$$

$(1{+}c, 1{+}3c)$

$(1, 1{+}3c)$

$c < 0.5$

$(1, 2.695)$



$\boxed{\begin{array}{l}(1{+}2c, 3{+}2c) \\ (2{+}c, 3{+}c) \\ (3, 3)\end{array}}$

Пусть i – число соседей t среди $\{w_1, w_2\}$

$i = 0$: $(1 + 2c, \; 2(1{+}c) + 1)$ $\quad 1.8899^n$

$i = 1$: $(1 + c + 1, \; 1 + 1 + (1{+}c))$

$$(1 + c \cdot (2 - i) + i, \; 1 + i + (2-i) \cdot (1+c))$$

$(1+$

$\tau(3,3)^{(1+c)n}$ $\quad \tau(1, 1{+}3c) < \tau(3,3)$

$c = 0.565$

$c = 0.565$

$$(1, 1+3c) \to \left(\frac{1}{1+c}, \frac{1+3c}{1+c}\right) \to \left(1 - \frac{c}{1+c}, 1 + \frac{2c}{1+c}\right)$$

$$(1+2c, 3+2c) \to \left(\frac{1+2c}{1+c}, \frac{3+2c}{1+c}\right) \to \left(1 + \frac{c}{1+c}, 3 - \frac{c}{1+c}\right)$$

$\frac{2+c}{1+c} = 2 - \frac{c}{1+c}$

$$(3, 3) \to \left(\frac{3}{1+c}, \frac{3}{1+c}\right) \to \left(3 - \frac{3c}{1+c}, 3 - \frac{3c}{1+c}\right)$$

$(1-\varepsilon, 1+2\varepsilon)$ $\quad (2-\varepsilon, 3-2\varepsilon)$

$(1+\varepsilon, 1+2\varepsilon)$ $(2-\varepsilon, 3-2\varepsilon)$

$(1+\varepsilon, 3-\varepsilon)$

$(3-3\varepsilon, 3-3\varepsilon)$

MIN DS

Выбираем в-ну с наиб. числом непокр. соседей
либо берёт её в ответ

SET COVER

$\hookrightarrow$ if размер макс. мн-ва $=2$

иначе

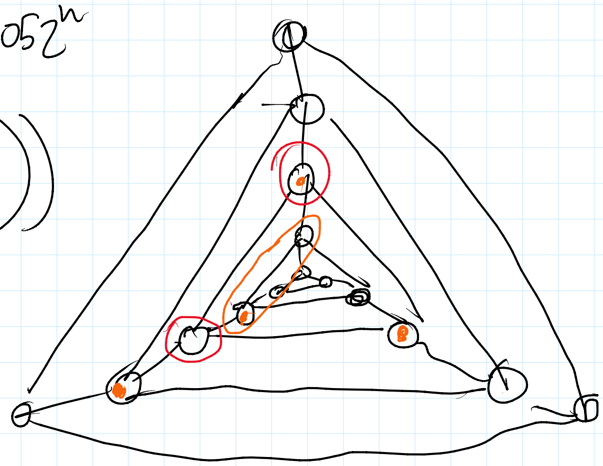
возьмем мн-во макс. р-ра
либо удалим, либо возьмем в ответ

1.3823^{n+m}

$\downarrow$

$1.3803^{2n} = 1.9052^n$

$\Omega\left(2^{n/3}\right)$



$T(k-1)$

$2T(k-2) + T(k-1)$

$\downarrow$

$2^{k}-2$