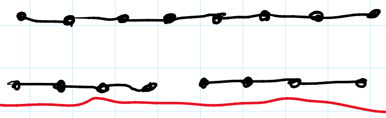
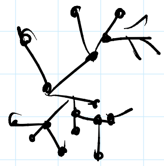
17 ноября 2021 г. 10:39

Pathwith & Treewidth





$\sim$ Дерево → легко (poly)

? tw

$\not\sim$ Не-дерево → сложно (NP-трудно)

$c^{tw} \cdot poly(n)$

$n^{f(tw)}$

def Path Decomposition графа G

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_p \subseteq V(G)$

такие, что

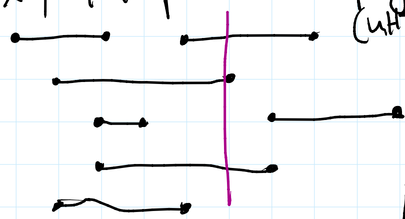
- $\exists uv \in E(G)\ \exists i \in [p]\ u,v \in X_i$
- $\forall i<j<k\ \ \forall u \in X_i \cap X_k\ \ u \in X_j$
- $\forall u\ \exists i\ u \in X_i$

$v \to$ отрезок сумок, где она встреч.

$pw(G) = \min\limits_{\text{path decomp. } G} \max |X_i| - 1$

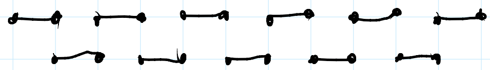
$pw(G) = \min\limits_{\text{интерв. надгр. } G} \max(\text{р-р клики в надграфе}) - 1$

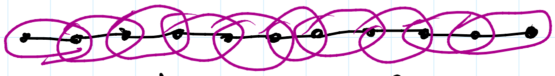
$\measuredangle$ граф пересечений отрезков (интерв. граф)



interval completion

complement



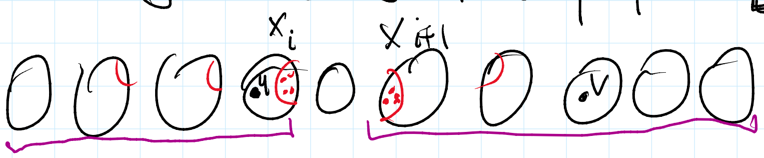


$pw(G)+1$

Утв I $\forall i$ $X_i \cap X_{i+1}$ – это разделитель графа

S $\quad G-S$ - несв. граф $\quad L = \left(\bigcup\limits_{j \le i} X_j\right) \setminus X_{i+1}$

proof



$R = \left(\bigcup\limits_{j \ge i} X_j\right) \setminus X_i$ $\square$

Утв.II Пересеч. соседних сумок $\le pw(G)$ по размеру

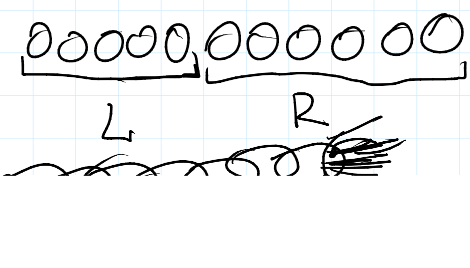
1) $X_i \ne X_{i+1}$

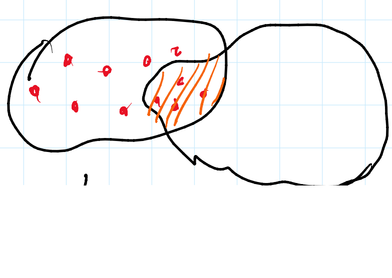
2) ~~$X_i \not\subseteq X_{i+1}$ $X_{i+1} \not\subseteq X_i$~~

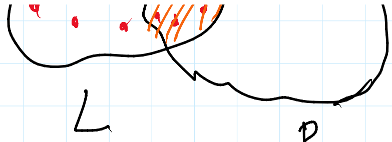
Thm VERTEX COVER допускает алг-м со временем работы $2^{pw(G)} \cdot poly(n)$

Требовали, чтобы PD ширины ...

proof







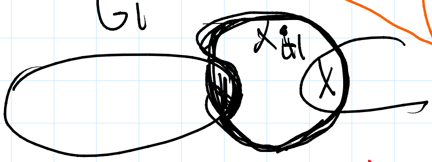
чтобы PD ширина pw была такая! длины poly(n)

$$OPT(i, X) = \min\{|S| : S \subseteq V(G[\bigcup_{j \le i} X_j]),\ S \cap (X_i \cap X_{i+1}) = X\}$$

$\#(X,S) \cdot poly(n)$ $\quad 2^{|X_i \cap X_{i+1}|} \cdot 2^{|X_{i+1} \setminus X|}$

$$OPT(0, \emptyset) = 0$$

$$OPT(i+1, X) = \min_{\substack{S \subseteq X_{i+1} \\ S \cap X_{i+2} = X}} \left[OPT(i, S \cap X_i) + |S \setminus X_i| \right]$$



S - верш. покр. $G[X_{i+1}]$

~~$OPT(i+1, X) = \begin{cases} +\infty, & X \text{ — не верш. покрытие } G[X_{i+1}] \\ OPT(i, X \cap X_i) + |X \setminus X_i| \end{cases}$~~

$S \cap X_i$

def Nice path decomposition

- $|X_i \,\Delta\, X_{i+1}| \le 1$
- $X_0 = \emptyset$
  - Introduce node (+v) $\quad X_i = X_{i-1} \cup \{v\}$
  - Forget node (−v) $\quad X_i = X_{i-1} \setminus \{v\}$
  - Introduce edge node (+uv) $\quad X_i = X_{i-1}$

Утв Любую path decomp. можно пер. в nice path decomp. увел. в poly(n) раз длина, а путевая ширина та же.

proof X_i и X_{i+1} $\quad X_i - v_1 - v_2 - v_3\ X_i \cap X_{i+1} + u_1 + u_2 + u_3\ X_{i+1}$ □

G[X_i] покр-ся X

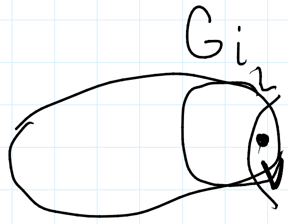
proof $X_i \cap X_{i+1}$ $\quad X_i - v_1 - v_2 - v_3\ X_i \setminus [\ldots]$ $i+1$ $\square$

$G[X_i]$ покр-ся X

$$OPT(i, X) = \min\left(OPT(i-1, X \cup \{v\}) + 1,\ OPT(i-1, X)\right)$$

$X_{i-1} = X_i \cup \{v\}$ $\quad \cap$ X_i

$X_i \Rightarrow$ forget node



$X_{i-1} = X_i \setminus v$

$$OPT(i, X) = OPT(i, X \setminus \{v\}) + |X \cap \{v\}|$$

X_i - introduce node

$$uv \quad \underset{X_i \text{ - introduce-edge node}}{OPT(i, X)} = \begin{cases} +\infty, & u \notin X\ v \notin X \\ OPT(i-1, X) \end{cases}$$

- Dominating Set отн. $pw(G)$

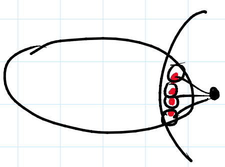
X_i - introduce node

$$OPT(i, X) = \begin{cases} +\infty, \text{ если } v \notin X \\ OPT(i-1, X \setminus \{v\}) + 1 \end{cases}$$

$v \notin X$

$OPT(i, X) + \infty$

$\to OPT(n, \emptyset)$ $+\infty$



в ответе $\quad$ доп.

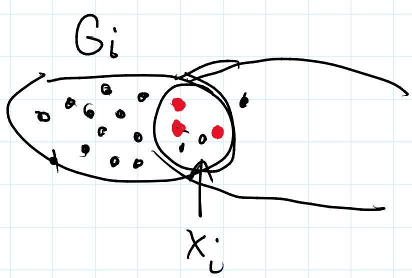
$$OPT(i, X, Y) = \min_{D} |D|$$

D дом. все в-ны в $G_i \setminus X_i$

$+Y$

$+ D \cap X_i = X$

$X \cap Y = \emptyset$

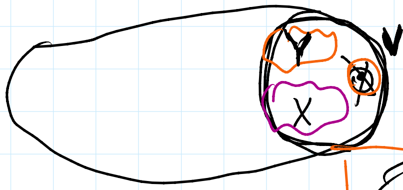


$X \cap Y = \varphi$

$X_{i-1} = X_i \setminus \{v\}$ $\quad OPT(i, X, Y) = [OPT(i-1, X, Y)$

$v \notin X, v \notin Y$

$X_i \to$ introduce node



$+\infty$

$v \notin X, v \in Y$

$v \in X, v \notin Y$:

$[OPT(i-1, X \setminus \{v\}, Y) + 1$

$X_i \to$ introduce edge uv $\quad u \in X$

$$OPT(i, X, Y) = OPT(i-1, X, Y \setminus \{v\})$$

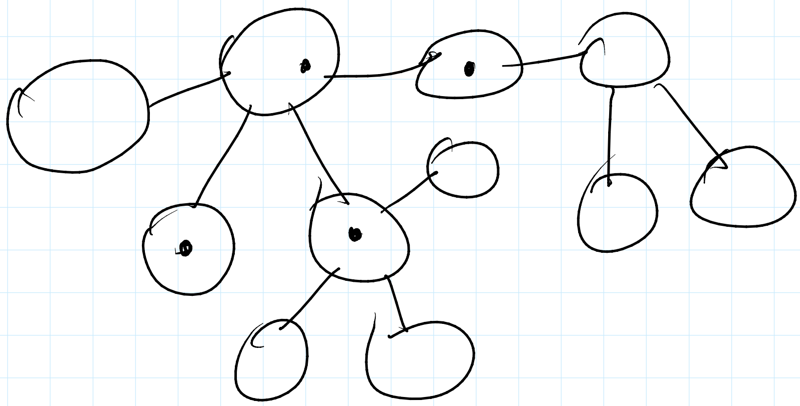
$X_i \to$ forget node

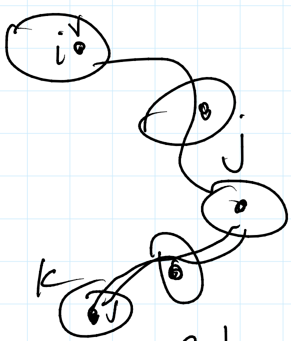
$X_{i-1} = X_i \cup \{v\}$

$X_i = X_{i-1} \setminus \{v\}$

$$OPT(i, X, Y) = \min\big(OPT(i-1, X \cup \{v\}, Y), OPT(i-1, X, Y \cup \{v\})\big)$$

def TD





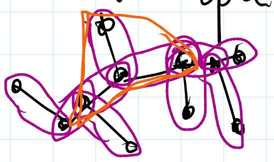
- $X_1, X_2, \ldots, X_t$ образуют дерево $\mathcal{T}$
- $\forall uv \in E(G) \quad u, v \in X_i$

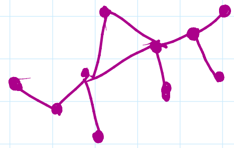
- $\forall uv \in E(G)$ $\quad u, v \in X_i$
- $\forall i, j, k$, что в $\mathcal{T}$ есть простой путь из i через j в k

$$\forall v \in X_i \cap X_k \quad v \in X_j$$

$$\frac{pw(G)}{\log n} \le tw(G) \le pw(G) \qquad \boxed{c^{pw} = c^{tw \log n} = c^{tw} \cdot poly(n)}$$

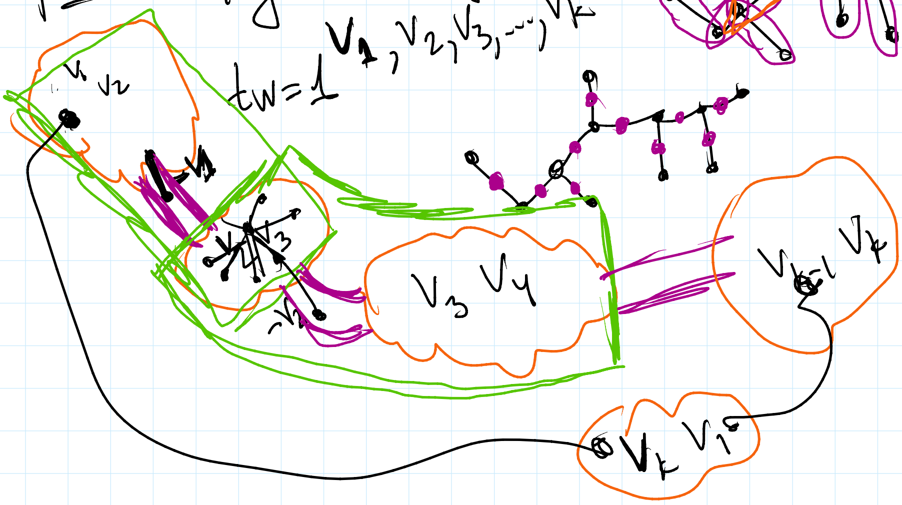
$$tw(G) \le c$$
$$pw(G) \le f(c)$$





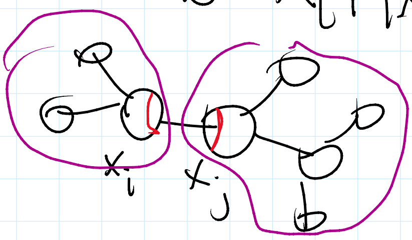
Thm Леса в точности сост. графы с $tw(G) \le 1$

proof Пусть есть цикл $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$



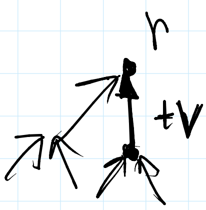
∎

Утв Если i и j — соседние узлы в TD то $X_i \cap X_j$ — разделитель графа □



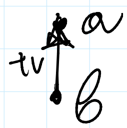
Def nice tree decomposition — корневое дерево

- $X_r = \varnothing$



и листья тоже $= \varnothing$

- introduce node (+v)



$$G_a = G_b + v \qquad X_a = X_b \cup \{v\}$$

$G_a = G_b + v \qquad X_a = X_b \cup \{v\}$

- forget node $\quad a \xleftarrow{-v} b$

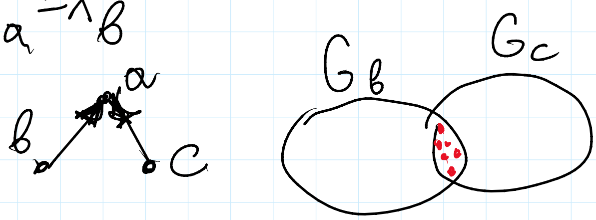
$v \in X_b \qquad G_a = G_b \qquad X_a = X_b - \{v\}$

- introduce-edge node $\quad a \xleftarrow{+uv} b$

$u, v \in X_b$

$G_a = G_b + uv \qquad X_a = X_b$

- join node



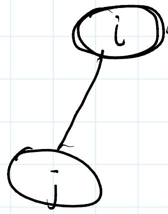
$G_a = G_b \cup G_c$

$X_a = X_b = X_c \qquad G_b[X_b]$ и $G_c[X_c]$ – пустые графы

$V(G_b) \cap V(G_c) = X_b$

<u>Утв</u> По данной tree decomp. можно построить nice tree decomp. за poly(n), длина увел. на $\leq$ poly(n).

<u>proof</u>

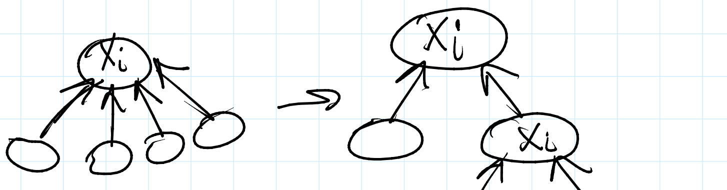


1) за произв. вершину

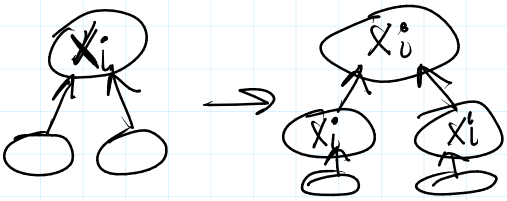
2) для каждого ребра $i \leftarrow j$ forget-introduce

$X_i \leftarrow X_j \qquad X_i \leftarrow \dots \leftarrow X_i \cap X_j \leftarrow \dots \xleftarrow{-v} X_j$

3)

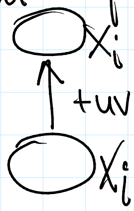


4)



5) Для Н... ... самый верхний узел кот. содержит

5) Для $\forall uv$ смотрим самый верхний узел, кот. содержит u и v одновременно



$\square$

VC по TD

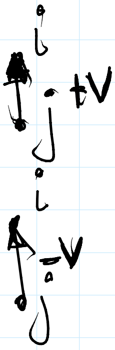
$$OPT(i, X) = \min_{\substack{S - VC \\ G_i \\ S \cap X_i = X}} |S|$$

introduce node

$$OPT(i, X) = OPT(j, X \setminus \{v\}) + |X \cap \{v\}|$$

forget node

$$OPT(i, X) = \min(OPT(j, X), OPT(j, X \cup \{v\}))$$



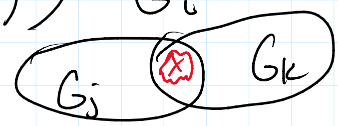
introduce-edge node

$$OPT(i, X) = \begin{cases} +\infty, & u, v \notin X \\ OPT(j, X) \end{cases}$$

bottom-top

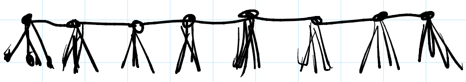
join node

$$OPT(i, X) = OPT(j, X) + OPT(k, X) - |X|$$

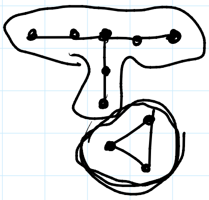


$$OPT(r, \emptyset)$$

1. Охарактеризовать графы с $pw = 1$
2. Док-ть, что в любом G есть в-на степени $\leq tw(G)$ $\leq pw(G)$



caterpillar



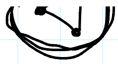
как минор

minor-closed families

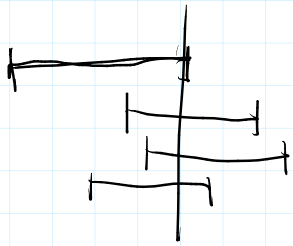
если такой минор есть $pw > k$

$pw(G)$ – вырожд.

pw(G) — вырожд.



если такой минор есть pw>k



pw(G)